Bilinearformen
Lösungen

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

- ☐ Das ist falsch, wie man z.B. in $\mathbb{R}^2$ mit $v_1 = (1,0) = v_3$ und $v_2 = (0,1)$ sieht.
- ☐ Das ist wahr. Das ist genau die Definition des orthogonalen Komplements.
- ☐ Das ist falsch. In der Vorlesung wurde gezeigt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
- ☐ Das ist falsch. Sei A, B unitär, d.h. $A^{-1} = \overline{A}^\top$ und $B^{-1} = \overline{B}^\top$. Dann sind A^{-1} und AB unitär, da

$$A^{-1}\overline{A^{-1}}^\top = (\overline{A}^\top A)^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^{-1} = \overline{A^{-1}}^\top$$

$$(AB)\overline{AB}^\top = AB\overline{B}^\top\overline{A}^\top = A\overline{A}^\top = E \quad \Rightarrow \quad (AB)^{-1} = \overline{AB}^{-1}$$

Da aber für A auch $-A$ unitär ist, gilt z.B. für A und $B = -A$ nicht, dass $A + B = 0$ ist, da die Nullmatrix gar keine Inverse besitzt.

- ☐ Das ist wahr. Für eine unitäre Matrix gilt

$$1 = \det(E) = \det(A\overline{A}^\top) = \det(A)\det(\overline{A}^\top) = \det(A)\det(\overline{A}) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2$$

Mit Nachrechnen, dass $A\overline{A}^\top = E$ gilt, wissen wir, dass A unitär ist.

2. Aufgabe: (*Orthogonale Komplemente*)

a) Es gilt

$$\operatorname{spur}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n a_{i,1}^2 + \sum_{i=1}^n a_{i,2}^2 + \dots \sum_{i=1}^n a_{i,n}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$$

Dies ist immer nicht-negativ und kann nur Null sein, wenn alle Einträge Null sind, also A die Nullmatrix ist. Also gilt $\langle A, A\rangle \geq 0$ und $\langle A, A\rangle = 0$ nur für $A = 0$.

b) Wir berechnen alle Elemente die orthogonal auf U_1 stehen

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \right\rangle = ac + bf$$

Da das für alle $a, b \in \mathbb{R}$ Null sein muss, folgt $c = 0 = f$ und damit

$$U_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ e & 0 \end{pmatrix} \mid d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

(2 Freiheitsgrade, also Dimension 2). Analog berechnen wir für U_2

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \right\rangle = a(e+f)$$

Da das für alle $a \in \mathbb{R}$ Null sein muss, folgt $e + f = 0$ und damit

$$U_2^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -e \end{pmatrix} \mid c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

(Dimension 3). Laut Vorlesung gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ und damit

$$(U_1 + U_2)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$$

(Dimension 1). Außerdem ist $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$. Nach der Dimensionsformel berechnen wir

$$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim(U_1^\perp) + \dim(U_2^\perp) - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) = 2 + 3 - 1 = 4$$

Also ist $U_1^\perp + U_2^\perp = \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R})$.

c) Wir berechnen den Eintrag $a_{i,j} = \mathrm{spur}(B_i^\top B_j)$, wobei B_i die Matrizen der Basis sind, und erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe: (*Schmidtsches Orthonormierungsverfahren I*)

1. v_1 wird normiert

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{3} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2, 0)$$

2. Wir rechnen erst einen Vektor aus, der orthogonal zu u_1 ist und normieren ihn dann

$$\overline{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \, u_1 = v_2 - 0 \cdot u_1$$

$$u_2 = \frac{\overline{u}_2}{\|\overline{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1)$$

3. Wir rechnen erst einen Vektor aus der orthogonal zu u_1 und u_2 ist

$$\overline{u}_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \, u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle \, u_2$$

$$= (-1, 1, 3, 1) - 3 \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2, 0) - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Das bedeutet, dass v_3 eine Linearkombination von v_1, v_2 ist und für die Ermittlung einer Basis gestrichen werden kann.

Also ist eine ONB von U

$$B = (u_1, u_2) = \Big((-1/3, 2/3, 2/3, 0), (0, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\Big)$$

4. Aufgabe: (*Schmidtsches Orthonormierungsverfahren II*)

a) Ein Skalarprodukt ist eine symmetrische Bilinearform, die positiv definit ist. Um zu sehen, dass es sich um eine Bilinearform handelt, definiere die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Dann ist $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ und somit erhalten wir laut Vorlesung eine Bilinearform mit darstellender Matrix A.

symmetrisch: Da A symmetrisch ist, ist auch $\langle \cdot, \cdot\rangle$ symmetrisch.

positiv definit: Da A die Eigenwerte $3 \pm \sqrt{8} > 0$ hat, ist A positiv definit.

b) Mit a) ist $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}$. Damit ist $\|a\| = \sqrt{4 - 24 + 45} = \sqrt{25} = 5$.

c)

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1}} = v_1$$

$$\hat{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle\, u_1 = v_2 - (1-2)u_1 = v_2 + u_1 = v_2 + v_1 = 2e_1 - e_2$$
$$u_2 = \frac{\hat{u}_2}{\|\hat{u}_2\|} = \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{4-8+5}} = \hat{u_2} = 2e_1 - e_2.$$

Somit ist $B = (u_1, u_2)$ eine ONB zu $\mathbb{R}^2$ mit

$$u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (2, -1).$$

5. Aufgabe: (*Orthogonale Abbildung*)

a) Die Abbildung ist symmetrisch, da die Multiplikation symmetrisch ist. Außerdem gilt für alle $k, r, p \in \mathbb{R}_2[x]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha k + r, p\rangle = (\alpha k(0) + r(0))p(0) + (\alpha k(1) + r(1))p(1) + (\alpha k(2) + r(2))p(2)$$

$$= \alpha(k(0)p(0) + k(1)p(1) + k(2)p(2)) + (r(0)p(0) + r(1)p(1) + r(2)p(2) = \alpha\,\langle k, p\rangle + \langle r, p\rangle$$

Also ist es eine symmetrische Bilinearform. Außerdem ist $\langle k, k\rangle = k(0)^2 + k(1)^2 + k(2)^2 \geq 0$. Es kann nur 0 sein, wenn $k(0) = k(1) = k(2) = 0$. Da $k \in \mathbb{R}_2[x]$ 3 Nullstellen hat, muss $k = 0$ gelten. Also ist die Bilinearfom auch positiv definit.

b) Ja, den für $b_1 = 1, b_2 = x - 1, b_3 = x^2 - 2x + 1/3$ gilt

$$\langle b_1, b_2 \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$\langle b_1, b_3 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{-2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\langle b_2, b_3 \rangle = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{-2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

c) Für $k, r \in \mathbb{R}_2[x]$ gilt

$$\langle f(k), f(r) \rangle = \langle k(2-x), r(2-x) \rangle = k(2)r(2) + k(1)r(1) + k(0)r(0) = \langle k, r \rangle$$

Also ist f orthogonal.

6. Aufgabe: (*Orthogonale Matrizen*)

reflexiv: Sei $Q = E \in O(n)$ die Einheitsmatrix. Dann gilt $v = Qv = v$. Also steht jedes v mit sich selber in Relation

symmetrisch: Angenommen, es ist $v \sim w$, dann existiert ein $Q \in O(n)$ mit $v = Qw$. Da $O(n)$ eine Gruppe ist, ist Q invertierbar und $Q^{-1} \in O(n)$. Somit ist $Q^{-1}v = w$ und damit $w \sim v$.

transitiv: Seien $v \sim w$ und $w \sim x$. Dann existieren $Q_1, Q_2 \in O(n)$ mit $v = Q_1 w$ und $w = Q_2 x$. Damit ist $v = Q_1 w = Q_1 Q_2 x$. Da $O(n)$ eine Gruppe ist, ist auch $Q_3 := Q_1 Q_2 \in O(n)$. Damit ist $v = Q_3 x$ und es folgt $v \sim x$.

$v = (3,1)$ und $w = (1,3)$ stehen in Relation, da mit

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix existiert mit $v = Qw$.

Eigenwerte

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Das ist wahr. Wenn A und E ähnlich sind, existiert eine invertierbare Matrix S mit $A = SES^{-1}$. Das kann man umformen zu $A = SES^{-1} = SS^{-1} = E$.
- ☐ Das ist falsch. Wenn das charakteristische Polynom nicht zerfällt, dann auch nicht das Minimalpolynom
- ☐ Das ist falsch. In der 3. Matrix ist die 1 in der 2.Zeile/3.Spalte außerhalb von Jordan-Blöcken. Außerdem ist auch die 5.Matrix nicht in Jordanscher Normalform, weil die Blöcke zur 2 nicht direkt hintereinander sind.
- ☐ Das ist nur wahr, wenn $N \neq 0$. Wenn N diagonalsierbar wäre, gäbe es S, sodass SNS^{-1} eine Diagonalmatrix D ist. Dann gilt für ein $m \in \mathbb{R}$ aber $(SNS^{-1})^m = S^m N^m S^{-m} = 0 = D^m$. Damit ist D die Nullmatrix und N auch.
- ☐ Das ist wahr, denn $P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x-2\mathrm{i})(x+2\mathrm{i})$. Oder: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom mit reellen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

2. Aufgabe: (*Eigenwerte und Eigenvektoren*)

a) Die darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

induziert f und hat somit die selben EW und EV. Die EW berechnen sich als Nullstellen von

$$p_f(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 8\lambda + 15$$

also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 5$. Den Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$ erhalten wir als Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$Eig(3, f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2\}$$

Den Eigenraum zu $\lambda_2 = 5$ erhalten wir als Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$Eig(5, f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = -v_2\}$$

b) Da f über $\mathbb{R}^2$ zwei **verschiedene** EW hat, ist er nach Vorlesung diagonalisierbar.

c) Aus b) folgt, dass eine Basis aus Eigenvektoren des $\mathbb{R}^2$ existiert. z.B

$$B = ((1,1),(1,-1))$$

Damit ist

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Die beiden EV bilden schon eine Orthogonalbasis, da

$$\langle (1,1),(1,-1) \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

Wenn wir sie normieren, bilden sie eine Orthonormalbasis und damit spaltenweise zusammengesetzt eine orthogonale Matrix

$$\|(1,1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \|(1,-1)\| \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e) Wenn v ein EV von f zum EW λ ist, dann folgt

$$f(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad v = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$$

Also ist dann v ein EV von f^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$. Für unser Beispiel hat f^{-1} also die Eigenwerte 1/3 und 1/5 mit

$$Eig(1/3, f^{-1}) = Eig(3, f) \qquad Eig(1/5, f^{-1}) = Eig(5, f)$$

3. Aufgabe: (*Beweis-Aufgaben*)

a) Sei A invertierbar. Genau dann hat das Gleichungssystem $A\dot{v} = 0$ nur die Lösung $v = 0$ (Erhalte ich durch Umstellen zu $v = A^{-1} \cdot 0 = 0$.) Dies ist äquivalent dazu, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist (Es gibt kein $v \neq 0$ mit $Av = 0 \cdot v = 0$).

b) Wir überprüfen die 4 Eigenschaften einer Gruppe:

- **G ist abgeschlossen:** Wir nehmen $f, g \in G$. Laut Vorlesung wissen wir, dass $f \circ g$ wieder ein Automorphismus ist. Außerdem wissen wir, dass es Eigenwerte λ und μ geben muss mit

  $$f(1,1) = \lambda(1,1) \qquad g(1,1) = \mu(1,1)$$

  Für die Hintereinanderausführung gilt wegen der Linearität ebenso

  $$f \circ g(1,1) = f(\mu(1,1)) = \mu \cdot f(1,1) = \mu \cdot \lambda(1,1)$$

  Also ist $f \circ g \in G$.
- **Es gibt ein neutrales Element:** Für die identische Abbildung $e(v) = v$ gilt $f \circ e = e \circ f = f$ und $e(1,1) = (1,1)$. Also gibt es ein neutrales Element in G.
- **Es gilt das Assoziativgesetz:** das wurde für die Hintereinanderausführung von Funktionen in LinA 1 bewiesen.

- **Es gibt ein inverses Element für alle $f \in G$:** Wenn $f \in G$ ist, dann besitzt f eine Umkehrfunktion (Automorphismus) mit $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$. Wie in a) gezeigt wurde, sind alle Eigenwerte von f ungleich Null, sodass es ein $\lambda \neq 0$ gibt mit $f(1,1) = \lambda(1,1)$ und damit $f^{-1}(1,1) = \frac{1}{\lambda}(1,1)$. Also folgt $f^{-1} \in G$.

4. Aufgabe: (*Lineare Abbildung im Polynomring*)

a) Wir berechnen alle Zahlen λ, für die es ein Polynom $p(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$ gibt mit $f(p) = \lambda p$, also

$$f(p) = (\alpha_1 - 2\alpha_0)t + (3\alpha_1 - 4\alpha_0) = \lambda\alpha_1 t + \lambda\alpha_0 = \lambda p$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\alpha_1 - 2\alpha_0 = \lambda\alpha_1 \qquad 3\alpha_1 - 4\alpha_0 = \lambda\alpha_0$$

lösen. Es ergeben sich Lösungen für die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$

b) Es gilt

$$f(t+1) = -t - 1 = (-1) \cdot (t+1) + 0 \cdot (2t+3)$$

$$f(2t+3) = -4t - 6 = 0 \cdot (t+1) + (-2) \cdot (2t+3)$$

und damit

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Da f 2 verschiedene Eigenwerte hat, ist f diagonalisierbar. Oder: Da f eine Basis hat, sodass die darstellende Matrix Diagonalgestalt hat, ist f diagonalisierbar.

5. Aufgabe: (*Diagonalisierbarkeit*)

Es ist

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)^2$$

Damit hat A die EW $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 3$. Wir wissen, dass für 5 die algebraische und geometrische Vielfachheit 1 ist. Für den EW 3 mit mit der algebraischen Vielfachheit 2 berechnen wir mit

$$3E - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit die geometrische Vielfachheit $3 - \text{Rang}(3I - A) = 3 - 1 = 2 = a(3, A)$. Damit ist A diagonalisierbar, da für alle EW algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen. Das Minimalpolynom ist also $m_A = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$.

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

Das quadratische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ hat die 2 komplexen Nullstellen $-1+i$ und $-1-i$. Damit ist B über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, da es komplexe Nullstellen hat. Über $\mathbb{C}$ hat es 3 verschiedene und ist daher diagonalisierbar. Es gilt $m_B = p_B$

$$p_C(\lambda) = (\lambda+2)^3$$

C hat also nur den Eigenwert $\lambda_1 = -2$ mit der algebraischen Vielfachheit 3. Es gilt aber

$$-2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $3 - \text{Rang}(-2I - A) = 3 - 1 = 2$. Da die algebraische und geometrische Vielfachheit von -2 nicht übereinstimmen, ist C weder in $\mathbb{C}$ noch in $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Es ist $m_C = (\lambda+2)^2$

$$p_D(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-s)$$

Das heißt, wenn $s \notin \{0,2\}$ ist, dann ist D diagonalisierbar, da es 3 verschiedene Eigenwerte hat (Dann gilt $m_D = p_D$). Sei $s = 0$. Dann gilt für den doppelten EW 0

$$0E - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit hat 0 die geometrische Vielfachheit $3 - 1 = 2$. In diesem Fall ist $m_D = \lambda(\lambda - 2)$. Die Matrix ist für $s = 0$ diagonalisierbar. Für $s = 2$ gilt allerdings, dass der doppelte EW 2 wegen

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die geometrische Vielfachheit $3 - 2 = 1$ hat. Damit ist D für $s = 2$ nicht diagonalisierbar und $m_D = p_D$

6. Aufgabe: (*Ideal*)

Wir überprüfen alle Eigenschaften eines Ideals von $\mathbb{R}[x]$:

- $0 \in I$**:** Für das Polynom $e(x) = 0$ für alle x gilt auch $e(2-\mathrm{i}) = 0$ und damit $e \in I$.
- **Abgeschlossenheit bzgl. +:** Wenn $p, g \in I$ (also $p(2-i) = g(2-i) = 0$), dann gilt auch $(p+g)(2-i) = p(2-i) + g(2-i) = 0$ und damit $p + g \in I$
- **Inverses Element in** I**:** Für $p \in I$ liegt auch $-p \in I$, da auch $-p(2-i) = 0$ gilt.
- $\forall r \in \mathbb{R}[x], p \in I : r \cdot f \in I$**:** Wenn $r \in \mathbb{R}[x]$ und $p \in I$, dann folgt für $r \cdot p(2-i) = r(2-i) \cdot p(2-i) = 0$ und damit $r \cdot p \in I$.

Also ist I ein Ideal. Wir wollen noch die Mengengleichheit $I = \langle f \rangle$ zeigen. Sei dazu $g \in I$. Dann muss $2 - i$ eine Nullstelle sein und damit auch $2 + i$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann man g schreiben durch

$$g(x) = p(x)(x - (2-i))(x - (2+i)) = p(x)(x^2 - 4x + 5) \in \left\langle x^2 - 4x + 5 \right\rangle$$

mit einem $p \in \mathbb{R}[x]$.

Wenn $g \in \langle f \rangle$ liegt, dann kann man g schreiben als $g(x) = p(x)(x^2 - 4x + 5)$. Also gilt $g(2-i) = p(2-i) \cdot 0 = 0$ und $g \in I$. Die Mengen sind identisch.

LINEARE ABBILDUNGEN & GLEICHUNGSSYSTEME

1. Einstieg

a falsch, z.B.: $f(1,0) = (1,0) = f(0, \frac{1}{2})$ $(\ker f = \langle 1, -\frac{1}{2} \rangle \neq \{0\})$

b wahr, z.B.: $f(e_1) = (1,0)$, $f(e_2) = (0,1)$, $f(e_3) = f(e_4) = f(e_5) = 0$

c wahr, denn f bijektiv insbes. injektiv $\Rightarrow \ker h_1 = \{0\}$

d falsch, denn $\forall \lambda \in \mathbb{R}: g(\lambda x) = \lambda k x + b \neq \lambda(kx + b) = \lambda g(x)$

2. Homomorphismus

seien $\lambda, \mu, a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ bel.

a $f(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \mu \sum_{i=0}^{n} b_i x^i) = f(\sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) x^i)$

$= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)(\lambda a_{i+1} + \mu b_{i+1}) x^i = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} x^i + \mu \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i$

$= \lambda f(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + \mu f(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i)$

b da $f(x^0) = 0$, $f(x^1) = 1$, $f(x^2) = 2x$, $f(x^3) = 3x^2$, … folgt

$$M_{B,B}(f) = \begin{cases} i & [M_{B,B}(f)]_{i,i+1} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

bzw
$$M_{B,B}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$$

c nein, denn $\dim(V) - \dim(\operatorname{im} f) = (n+1) - n = 1 = \dim \ker f$

und V nicht abänderbar da f auf V definiert

d 1) falsch, denn es gilt:

$g(f(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)) = g(\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} i a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \neq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

2) wahr, denn es gilt:

$f(g(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)) = f(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} a_{i-1} x^i + 0 x^0) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \frac{1}{i+1} a_i x^i$

$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

3. Epi-, Mono-, Automorphismen

a da $\forall \lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$: $f(\lambda x + \mu y) = w(\lambda x) + z + w(\mu y) + z$

$$\overset{!}{=} \lambda(wx+z) + \mu(wy+z) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

gilt: $f \in Hom(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Leftrightarrow z = 0$

weiter gilt $\forall w \in \mathbb{R}, z=0$: $\ker f_{w,0} = \{0\}$

b aus a): $z = 0$

weiter gilt: $w = 0 \Rightarrow \operatorname{im} f = \{0\}$

$\Rightarrow f_{w,z} \in Mon(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Leftrightarrow z=0, w \neq 0 \Leftrightarrow f_{w,z} \in Epi(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Leftrightarrow f_{w,z} \in Aut(\mathbb{R},\mathbb{R})$

4. Rang und Invertierbarkeit

a $rg(A) = 2$, da $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in Mat(2,\mathbb{R})$

$rg(B) = 2$, da $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ lin. unabhängig sind

$rg(C) = 2$, da $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ lin. unabhängig und $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

$rg(D) = 3$, da $\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$ lin. unabhängig

b nur A und D sind invertierbar

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -8 & -16 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Darstellende Matrix

a $M_{B,B}(f) = [f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b $\det(M_{B,B}(f)) = 1\cdot0\cdot0 + 1\cdot(-3)\cdot(-2) + 1\cdot0\cdot1 - (-2)\cdot0\cdot1 - 1\cdot(-3)\cdot1 - 0\cdot0\cdot1 = 6 + 3 = 9$

c da $\det(M_{B,B}(f)) \neq 0$ ist $M_{B,B}(f)$ invertierbar, f ist bijektiv und somit $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$

d da $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ folgt $\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathbb{R}^3) = 0$

e $M_{B,B'}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M_{B,B}(f^{-1}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_{B',B'}(f^{-1}) = M_{B,B'}(id_{\mathbb{R}^3})\, M_{BB}(f^{-1})\, M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3})$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 18 & 12 & -18 \\ 9 & 6 & 18 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Lineare Gleichungssysteme

a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

b $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{I+2III}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \emptyset$

c $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ -x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

7. Parameterabhängige lineare Gleichungssysteme

a $\begin{bmatrix} 1 & \rho & 2 \\ 2\rho & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \rho & 2 \\ \rho & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 2\rho & 2 \end{bmatrix}\right) = 2 - 2\rho^2 = 0$ für $\rho = \pm 1$

$\rho = 1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rho = -1: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & \rho & 2 \\ 2\rho & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2 & , \rho \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x \\ 2-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\} & , \rho = 1 \\ \emptyset & , \rho = -1 \end{cases}$$

b $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -\rho & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\det\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & \rho & 3 \end{bmatrix}\right) = -8a - 64 = 0$ für $\rho = -8$

für $\rho = 8$: $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -\rho & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3 & , \rho \in \mathbb{R} \setminus \{-8\} \\ \left\{\begin{pmatrix} x \\ -4/5\,x \\ 9/5\,x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\} & , \rho = -8 \end{cases}$$

Mathetag Lineare Algebra — Lösungen "Vektorräume"

①

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Das Erzeugnis einer zwei-elementigen Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ hat immer Dimension 2.
- ☒ Ein Erzeugendensystem eines Unterraums U von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(U) = 2$ hat mindestens 2 Elemente.
- ☐ Es gibt 2 Unterräume U_1 und U_2 des $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$ mit $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.
- ☒ Seien V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Es gilt $\operatorname{span}(\{v_1\}) + \operatorname{span}(\{v_2\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$.

② Zu prüfen:

I U ist nicht leer bzw. $0_V \in U$.

II Für $a, b \in U$ gilt: $a + b \in U$.

III Für $a \in U$, $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt: $\alpha \cdot a \in U$.

a) $U_1 = \{(0,0,0)\}$

I $0_V \in U_1$ ✓

II $a, b \in U \Rightarrow a = b = (0,0,0) \Rightarrow a + b = (0,0,0) \in U_1$ ✓

III $a \in U, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow a = (0,0,0) \Rightarrow \alpha \cdot a = (0,0,0) \in U_1$ ✓

Damit ist U_1 ein Unterraum von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über $\mathbb{C}$.

b) $U_2 = \{(0, 3, 3a) \mid a \in \mathbb{C}\}$

I $0_V \notin U_2$ ✗ $\Rightarrow U_2$ ist kein Unterraum von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über $\mathbb{C}$.

c) $U_3 = \{(a, 0, 2a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

I $0_V \in U_3$ mit $a = b = 0$ ✓

II $v_1 = (a, 0, 2a-b)$, $v_2 = (c, 0, 2c-d) \in U_3$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = (\underbrace{a+c}_{x \in \mathbb{R}}, 0, 2(\underbrace{a+c}_{x}) - (\underbrace{b+d}_{y \in \mathbb{R}})) = (x, 0, 2x-y) \in U_3$ ✓

III $\alpha \in \mathbb{C}$, $v_1 = (a, 0, 2a-b) \in U_3 \Rightarrow \alpha \cdot (a, 0, 2a-b) = (\underbrace{\alpha \cdot a}_{x \in \mathbb{C}}, 0, 2 \cdot \underbrace{\alpha a}_{x} - \underbrace{\alpha b}_{y \in \mathbb{C}}) = (x, 0, 2x-y) \notin \mathbb{R}^3$

Da x und y damit nicht unbedingt in $\mathbb{R}$ liegen, liegt auch $\alpha \cdot v_1$ nicht unbedingt in U_3.

U_3 ist damit kein Unterraum von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über $\mathbb{C}$.

d) $U_4 = \{(2a-b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$

I $0_V \in U_4$ mit $a = b = 0$ ✓

II $v_1 = (2a-b, a, b)$, $v_2 = (2c-d, c, d) \in U_4$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = (2a+2c-(b+d), a+c, b+d) = (2 \cdot (\underbrace{a+c}_{x \in \mathbb{C}}) - (\underbrace{b+d}_{y \in \mathbb{C}}), \underbrace{a+c}_{x}, \underbrace{b+d}_{y}) = (2x-y, x, y) \in U_4$ ✓

III $v_1 = (2a-b, a, b) \in U_4$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \alpha \cdot v_1 = (2 \cdot \underbrace{\alpha a}_{x \in \mathbb{C}} - \underbrace{\alpha b}_{y \in \mathbb{C}}, \underbrace{\alpha a}_{x}, \underbrace{\alpha b}_{y}) = (2 \cdot x - y, x, y) \in U_4$ ✓

Damit ist U_4 ein Unterraum von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über $\mathbb{C}$.

e) $U_5 = \{(a, b-c, c-2) \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$

I $0_V \in U_5$ mit $a = 0$, $b = c = 2$

II $v_1 = (a, b-c, c-2)$, $v_2 = (d, e-f, f-2) \in U_5$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = (a+d, b+e-(c+f), (c+f-2)-2)$

$= (\underbrace{a+d}_{a^* \in \mathbb{C}}, \underbrace{(b+e-2)}_{b^* \in \mathbb{C}} - \underbrace{(c+f-2)}_{c^* \in \mathbb{C}}, \underbrace{(c+f-2)}_{c^*} - 2) = (a^*, b^* - c^*, c^* - 2) \in U_5$ ✓

III $v_1 = (a, b-c, c-2) \in U_5$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \alpha \cdot v_1 = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b - \alpha \cdot c, \alpha \cdot c \underbrace{- \alpha \cdot 2}_{= -2 \cdot (\alpha - 1) - 2})$

$= (\underbrace{\alpha \cdot a}_{= a^*}, \underbrace{\alpha \cdot b - 2(\alpha - 1)}_{b^* \in \mathbb{C}} - \underbrace{(\alpha c - 2(\alpha - 1))}_{c^* \in \mathbb{C}}, \underbrace{(\alpha \cdot c - 2 \cdot (\alpha - 1))}_{c^*} - 2)$

$= (a^*, b^* - c^*, c^* - 2) \in U_5$

Damit ist U_5 ein Unterraum von $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ über $\mathbb{C}$.

③ $M = \{\overset{a}{(1,2,6)}, \overset{b}{(4,0,3)}, \overset{c}{(-2,2,-2)}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

a) $v_1 = (2,-2,2) = -1 \cdot (-2,2,-2)$

b) $v_2 = (1,0,0)$

$\Rightarrow$ I $1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot (-2)$

II $0 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 2 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3$

III $0 = \lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot (-2)$

- $3 \cdot \mathrm{I} - 4 \cdot \mathrm{III}$: $3 = 3\lambda_1 + 12\lambda_2 - 6\lambda_3$

$-\quad 0 = 24\lambda_1 + 12\lambda_2 - 8\lambda_3$

$3 = -21\lambda_1 + 2\lambda_3$ IV

- II in IV: $3 = 21\lambda_3 + 2\lambda_3 = 23\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{23}$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{23}$ (λ_3 in II)

- λ_1, λ_3 in III: $0 = 6 \cdot (-\frac{3}{23}) + 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot (\frac{3}{23}) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{8}{23}$

$\Rightarrow (1,0,0) = -\frac{3}{23} \cdot (1,2,6) + \frac{8}{23} \cdot (4,0,3) + \frac{3}{23} \cdot (-2,2,-2)$

c) $v_3 = (0,4,4)$

I $0 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot (-2)$

II $4 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 2 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2 - \lambda_3$

III $4 = \lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot (-2)$

- $4 \cdot \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}$: $16 = 24 \cdot \lambda_1 + 12\lambda_2 - 8\lambda_3$

$-\quad 0 = 3\lambda_1 + 12\lambda_2 - 6\lambda_3$

$16 = 21\lambda_1 - 2\lambda_3$ IV

- II in IV: $16 = 21 \cdot (2 - \lambda_3) - 2\lambda_3 = 42 - 23\lambda_3$

$\Rightarrow \lambda_3 = -\frac{16-42}{23} = \frac{26}{23}$

- λ_3 in II: $\lambda_1 = 2 - \frac{26}{23} = \frac{20}{23}$
- λ_1, λ_3 in I: $0 = \frac{20}{23} + 4 \cdot \lambda_2 - \frac{52}{23} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-\frac{20-52}{23}}{4} = \frac{8}{23}$

$\Rightarrow (0,4,4) = \frac{20}{23} \cdot (1,2,6) + \frac{8}{23} \cdot (4,0,3) + \frac{26}{23} \cdot (-2,2,-2)$

d) $v_4 = (6,4,1)$

I $6 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot (-2)$

II $4 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 2 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2 - \lambda_3$

III $1 = \lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot (-2)$

- $4 \cdot \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}$: $4 = 24 \cdot \lambda_1 + 12\lambda_2 - 8\lambda_3$

$-\quad 18 = 3\lambda_1 + 12\lambda_2 - 6\lambda_3$

$-14 = 21\lambda_1 - 2\lambda_3$ IV

- II in IV: $-14 = 21 \cdot (2 - \lambda_3) - 2\lambda_3$

$\Rightarrow -14 = 42 - 21\lambda_3 - 2\lambda_3 \Rightarrow 23\lambda_3 = 56 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{56}{23}$

- λ_3 in II: $\lambda_1 = 2 - \frac{56}{23} = -\frac{10}{23}$
- λ_1, λ_2 in III: $1 = 6 \cdot (-\frac{10}{23}) + 3\lambda_2 - 2 \cdot \frac{56}{23} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1 + \frac{60}{23} + \frac{112}{23}}{3} = \frac{65}{23}$

$\Rightarrow (6,4,1) = -\frac{10}{23} \cdot (1,2,6) + \frac{56}{23} \cdot (4,0,3) + \frac{65}{23} \cdot (-2,2,-2)$

④ $a \in \mathbb{R}$, $B = \{(2,-1,a), (-2a, a, -16)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

a) I $0 = 2\cdot\lambda_1 - 2a\cdot\lambda_2 \Rightarrow 2\lambda_1 = 2a\cdot\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = a\cdot\lambda_2$

II $0 = -\lambda_1 + a\cdot\lambda_2$

III $0 = a\cdot\lambda_1 - 16\lambda_2 \overset{\lambda_1}{\underset{\text{aus I}}{\Rightarrow}} 0 = a^2\lambda_2 - 16\cdot\lambda_2 = \boxed{\lambda_2\cdot(a^2-16)}$

Es gibt jetzt 2 Fällen, in denen $\lambda_2\cdot(a^2-16) = 0$ gilt:

- Fall 1: $\lambda_2 = 0$. Dann müsste allerdings auch $\lambda_1 = 0$ sein und die Vektoren wären linear unabhängig.
- Fall 2: $a^2 - 16 = 0$. Dann gilt $a_{1/2} = \pm\sqrt{16} \Rightarrow a_1 = 4$, $a_2 = -4$.

Damit sind die Vektoren genau dann linear abhängig, wenn $a \in \{4,-4\}$ ist.

b) Sei $a = 0$. Dann ist $B = \{(2,-1,0), (0,0,-16)\}$.

Dann kann B z.B. mit $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ oder $v_3 = (1,1,0)$ zu einer Basis ergänzt werden, da $(-2,1,0)$, $(0,0,-16)$ und v_i linear unabhängig sind da wir 3 linear unabhängige Vektoren für einen Vektorraum der Dimension 3 gefunden haben, bildet $B^* = \{(-2,1,0), (0,0,-16), v_i\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

⑤

a) $V_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$

- Da die Matrizen aus V_1 von zwei unabhängigen Variablen (a und b) abhängen, hat V_1 die Dimension 2.
- Ein Basis von V_1 ist z.B. $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) $V_2 = \{(x,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}, y = 2z\}$

- Da $y = 2z$ sein soll, gilt $V_2 = \{(x, 2z, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$.
  Damit hängt V_2 von 2 unabhängigen Variablen ab. V_2 hat damit Dimension 2.
- Eine Basis von V_2 ist z.B. $B_2 = \{(1,0,0,0), (0,2,1,0)\}$.

c) $V_3 = \{(2c-a, 2a, b-c, d) \in \mathbb{C}^4 \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}\}$

- Um zu zeigen, dass die 4 Variablen a,b,c,d unabhängig sind, stellen wir ein Gleichungssystem auf:

  I $0 = 2c - a \overset{a=0}{\Rightarrow} c = 0$

  II $0 = 2a \Rightarrow a = 0$

  III $0 = b - c \overset{c=0}{\Rightarrow} b = 0$

  IV $0 = d \Rightarrow d = 0$

  Damit sind die Variablen unabhängig voneinander und es gilt $\dim(V_3) = 4$ (da wir 4 unabhängige Variablen brauchen, um V_3 zu beschreiben).
- Eine Basis von V_3 ist z.B. $B_3 = \{(-1,2,0,0), (0,0,1,0), (2,0,-1,0), (0,0,0,1)\}$.

⑥

a) $V = \mathbb{R}^3$, $M_1 = \{(5,4,3), (2,1,0)\}$.

- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ hat 3 linear unabh. Vektoren
- z.B.: $(0,0,1)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{I} \quad 0 = 5\cdot\alpha + 2\cdot\beta \\ &\text{II} \quad 0 = 4\cdot\alpha + 1\cdot\beta \\ &\text{III} \quad 0 = 3\cdot\alpha + 1\cdot\gamma \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{I} - 2\cdot\text{II}: \quad 0 = -3\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \\ &\alpha \text{ in II, III}: \quad \beta = 0,\ \gamma = 0 \end{aligned}$$

Damit sind $(5,4,3)$, $(2,1,0)$ und $(0,0,1)$ linear unabhängig und $M_1^* = \{(5,4,3), (2,1,0), (0,0,1)\}$ ist eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$.

b) $V = \mathbb{C}^3$, $M_2 = \{(1,i,0)\}$

- $\dim(\mathbb{C}^3) = 3 \Rightarrow$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ hat 3 linear unabh. Vektoren
- z.B. $v_2 = (0,0,1) \Rightarrow (1,i,0)$ und $(0,0,1)$ offensichtlich linear unabhängig
- z.B. $v_3 = (0,1,0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\text{I} \quad 0 = 1\cdot\alpha \\ &\text{II} \quad 0 = i\cdot\alpha + 1\cdot\gamma \\ &\text{III} \quad 0 = 1\cdot\beta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{I}: \ \alpha = 0,\ \text{III}: \ \beta = 0 \\ &\alpha \text{ in II}: \quad \gamma = 0 \end{aligned}$$

Damit sind $(1,i,0)$, $(0,0,1)$ und $(0,1,0)$ linear unabhängig und $M_2^* = \{(1,i,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ ist eine Basis von $V = \mathbb{C}^3$.

c) $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(5) = 0\}$, $M_3 = \{x-5\}$

- $\mathbb{R}_2[x]$ hat die Dimension 3, also gilt $\dim(V) \leq 3$.
- Da wir eine Einschränkung haben ($p(5)=0$) hat V eine Dimension weniger als $\mathbb{R}_2[x]$, also $\dim(V) = 2$.
- Wir brauchen also noch ein Basispolynom, z.B. $p_1(x) = x^2 - 25$.

  Zu zeigen ist jetzt, dass $x-5$ und x^2-25 linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem darstellen.
- Die lineare Unabhängigkeit sieht man: es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha(x-5) = x^2-25$ ist.
- Zum Erzeugendensystem: ein beliebiges Polynom $p^*(x) = ax^2 + bx + c \in V$ muss mit $x-5$ und x^2-25 darstellbar sein
  - Wir sehen: wir brauchen $a\cdot(x^2-25)$, da wir nur so $a\cdot x^2$ aus $p^*(x)$ darstellen können.
  - Wir sehen: wir brauchen $b\cdot(x-5)$, da wir nur so $b\cdot x$ aus $p^*(x)$ darstellen können.

  Setzt man $p^*(5) = 0$ ein, erhält man $p^*(5) = a\cdot 25 + b\cdot 5 + c \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad c = \boxed{-a\cdot 25 - b\cdot 5}$$

Darstellung mit Basispolynomen

$$\Rightarrow p^*(x) = ax^2 + bx + c = a\cdot(x^2-25) + b\cdot(x-5) = a\cdot x^2 - a\cdot 25 + b\cdot x - b\cdot 5 = ax^2 + bx + \boxed{(-a\cdot 25 - b\cdot 5)}$$

- Wir sehen also, dass sich jedes Polynom aus $\mathbb{R}_2[x]$ mit $x-5$ und x^2-25 darstellen lässt, die Polynome $x-5$ und x^2-25 bilden somit ein linear unabh. Erzeugendensystem von V.

  Damit ist $B^* = \{x-5, x^2-25\}$ eine Basis von V.

d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $\dim(V) = 3$ => wir brauchen 3 Basismatrizen
- z. B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 0 = 1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta \\ \mathrm{II} & 0 = 2 \cdot \alpha \\ \mathrm{III} & 0 = 3 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma \\ \mathrm{IV} & 0 = 2 \cdot \alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{II}: \alpha = 0 \\ \alpha \text{ in } \mathrm{I}: \beta = 0 \\ \beta \text{ in } \mathrm{III}: \gamma = 0 \end{array}$$

Die drei Matrizen sind also linear unabhängig.

Noch zu zeigen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem für V.

- $$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & a = 1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta \\ \mathrm{II} & b = 2 \cdot \alpha \\ \mathrm{III} & c = 3 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma \\ \mathrm{IV} & b = 2 \cdot \alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{II}: \alpha = \frac{1}{2} b \\ \alpha \text{ in } \mathrm{I}: a = \frac{1}{2} b + 2 \cdot \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} b \\ \beta \text{ in } \mathrm{III}: c = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} a - \frac{1}{4} b\right) + \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{3}{4} b + c - \frac{3}{2} a \end{array}$$

Damit können wir alle Matrizen aus V mit $M_4^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

darstellen. Damit ist M_4^* ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V und somit eine Basis von V.